# Modelos matemáticos que descrevem o crescimento populacional: aplicados e contextualizados aos dados do município de Osório

Bruna Pagani Pugens[1]
Juarez Ferri da Silva[1]
Rosa da Rocha Fernandes[1]
Darlan da Silva Godinho [2]

**Resumo**: O presente artigo tem como objetivo investigar as aplicações dos conceitos matemáticos apresentados e desenvolvidos nas disciplinas da área da Matemática Aplicada, sob a ótica do crescimento populacional. A idéia principal é buscar, neste processo de investigação, compreender com maior profundidade as contribuições da matemática para a sociedade. Na escolha do tema, foi levado em consideração o fato do mesmo poder ser analisado a partir dos conhecimentos científicos e contextualizado na realidade do município de Osório. Aplicamos o Modelo Malthusiano para o crescimento populacional com o objetivo de fazermos a comparação dos resultados obtidos pelo modelo, com os dados estatísticos obtidos no IBGE, no período de 2001 a 2010. Com os resultados obtidos através da aplicação de uma modelagem adequada, para o crescimento populacional, mostra-se a validação do modelo e conseqüentemente a validação da teoria de Malthus, e mais fortemente as contribuições da matemática para esta área da ciência.

**Palavras-chave:** Modelagem Matemática. Modelo Malthusiano. Crescimento Populacional.

**Abstract**: This article aims to investigate the applications of mathematical knowledge presented and developed in the disciplines of Applied Mathematics, from the perspective of population growth. The main ideas to look at this research process, understand more deeply the contributions of mathematics to society. In choosing the theme, was taken into account the fact that the same could be analyzed from the scientific and contextualized in the reality of municipal Osorio. We apply the model to the Malthusian population growth in order to make the comparison of statistical data obtained from the IBGE, from 2001 to 2010. With the results obtained by implementing as uitable modeling for population grow this shown to validate the model and therefore the validation of the theory of Malthus, and more strongly the contributions of mathematics.

**Keywords:** Mathematical modeling. Model Malthusian. Population growth.

## Introdução

A utilização de modelagem matemática no estudo das populações é um recurso matemático muito importante para a sociedade, principalmente para os governantes, que usam as taxas de crescimento, ou decrescimento populacional, como parâmetros na tomada de decisões, no que se referem à aplicação dos recursos financeiros públicos, necessários para o atendimento das populações. Este artigo tem como objetivo mostrar que a Matemática está diretamente ligada aos fenômenos naturais, como por exemplo, o crescimento populacional. Com os conceitos estudados nas disciplinas de matemática aplicada, principalmente, a disciplina de Equações Diferenciais, ficamos instrumentalizados matematicamente

[1] Acadêmicos do Curso de Licenciatura em Matemática na FACOS – Faculdade Cenecista de Osório.
[2] Professor do curso de Licenciatura em Matemática – FACOS.

com diversos recursos para a solução de equações diferenciais ordinárias, o que nos possibilitou aplicá-los e então encontrarmos a solução para o Modelo Malthusiano, que é uma equação diferencial ordinária e que pode ser solucionada através da aplicação do Método de Variáveis Separáveis. Os resultados encontrados pela aplicação do modelo e dos dados obtidos no IBGE, serão mostrados e comparados através de tabelas e gráficos.

## Considerações sobre modelagem matemática

A modelagem matemática consiste na arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los, interpretando suas soluções na linguagem do mundo real, segundo (BASSANEZI 2002, p. 98). A modelagem pressupõe multidisciplinaridade, nesse sentido, vai ao encontro das novas tendências que apontam para a remoção de fronteiras entre as diversas áreas de pesquisa. Em seus vários aspectos, é um processo que alia teoria e prática, motiva seu usuário na procura do entendimento da realidade que o cerca e tem papel importante na busca de meios para agir sobre ela e assim transformá-la. A modelagem matemática surge da necessidade do homem compreender os fenômenos que o cercam de modo que possa interferir ou não em seu processo de construção. São previsões de tendências e aproximações da realidade. Ela não pode ser utilizada apenas para justificar o conteúdo que está sendo ensinado, mas sim se deve ter fundamento, isto é, saber o motivo pelo qual o aluno deve aprender matemática e a importância que isto representa na formação dele como cidadão responsável e participativo na sua sociedade. Temos que:

> [...] à criação de modelos para interpretar os fenômenos naturais e sociais é inerente ao ser humano. A própria noção de modelo está presente em quase todas as áreas; arte, moda, arquitetura, história, economia, geografia, literatura, matemática. Alias a história da ciência é testemunha disso. [...] (BIEMBENGUT 1999, p.136).

Nesse sentido pode-se dizer que a Modelagem Matemática é o processo que envolve a obtenção de um modelo que busca descrever matematicamente um fenômeno da nossa realidade para tentar compreendê-lo e estudá-lo, criando hipóteses e reflexões sobre tais fenômenos. Os modelos devem ser testados em confronto com os dados empíricos, comparando suas soluções e previsões com os valores obtidos no sistema real. Um modelo deve prever, no mínimo, os fatos que os originaram e os motivos dos resultados obtidos, que facilita avaliar as previsões ou mesmo sugerir um aperfeiçoamento dos modelos. Seja qual for o caso, a resolução de um problema em geral quantificado requer uma formulação matemática detalhada. Uma perspectiva, um conjunto de símbolos e relações matemáticas que procura traduzir de alguma forma um fenômeno em questão ou problema de situação real, denomina-se “Modelo Matemático”. Na ciência, a noção de modelo é fundamental. Em especial a matemática com sua arquitetura, permitem a elaboração de Modelos Matemáticos possibilitando uma melhor compreensão, simulação e previsão do fenômeno testado.

A elaboração de um modelo depende do conhecimento matemático que se tem. Se o conhecimento matemático restringe-se a uma matemática elementar, como aritmética e ou medidas, o modelo pode ficar delimitado a esses impasses. Quanto maior o conhecimento matemático maiores serão as possibilidades de resolver questões que exijam uma matemática mais sofisticada. Porém o valor de um modelo não está restrito a sofisticação matemática e sim a sua relevância e importância.

A Modelagem Matemática é assim uma arte que se propõe a elaborar, formular e resolver problemas. Nesse trabalho utilizamos um tipo de modelo dado pelas equações que contém as derivadas ou diferenciais de uma variável dependente em relação a uma variável independente, que são as equações diferenciais ordinárias de primeira ordem. Com o objetivo de compreendermos este tipo de modelo iremos apresentar um breve elenco de definições e conceitos que compõem a teoria das equações diferenciais e a teoria de Malthus.

**Teoria das equações diferenciais**

**Definição de equação diferencial**: Uma equação que contém as derivadas ou diferenciais de uma ou mais variáveis dependentes, em relação a “uma ou mais” variáveis independentes, é chamada de Equação Diferencial (ED) e são classificadas de acordo com o “tipo”, a “ordem” e a “linearidade”.

**Classificação das equações diferenciais**

**Quanto ao tipo**: Se uma equação contém somente derivadas ordinárias de uma ou mais variáveis dependentes, com relação a uma única variável dependente, ela é chamada de Equação Diferencial Ordinária (EDO), por outro lado uma equação que envolve as derivadas parciais de uma ou mais variáveis dependentes de duas ou mais variáveis independentes é chamada de Equação Diferencial Parcial (EDP).

**Quanto à ordem**: A ordem da derivada de maior ordem em uma equação diferencial é, por definição, a ordem da equação diferencial.

**Quanto à linearidade**: Uma equação diferencial é chamada de "linear" quando pode ser escrita na forma padrão tendo duas propriedades caracterizadas, onde na primeira, a variável dependente $y$ e todas as suas derivadas são do primeiro grau, isto é, a potência de cada termo envolvendo $y$ é $1$, e a segunda, que cada coeficiente depende apenas da variável independente $x$. Uma equação que não é linear é chamada de "não linear" e pode ser escrita na forma implícita.

**Equações diferenciais de primeira ordem**

As equações diferenciais de primeira ordem são definidas do seguinte modo:

**Equação diferencial de primeira ordem**

Seja $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ a equação diferencial de primeira ordem na forma padrão, onde $f(x, y)$ é uma função conhecida de duas variáveis. Qualquer função diferenciável $y = f(x, c)$ que satisfaça a esta condição para todos os valores de $x$ em certo intervalo é dita uma família de soluções desta equação.

### Equação diferencial de primeira ordem - variáveis separáveis

É uma equação diferencial, onde você terá frequentemente que utilizar integração por partes, frações parciais ou possivelmente uma substituição. Às vezes é conveniente usar $x$ em vez de $t$ para designar a variável independente de uma equação diferencial. Neste caso, a equação geral de primeira ordem assume a forma $\frac{dy}{dx} = \frac{A(x)}{B(y)}$.

### Equação diferencial de primeira ordem linear

É a equação cuja função $f(x, y)$ conhecida, de duas variáveis, depende linearmente da variável dependente $y$, então a equação pode ser escrita na forma $\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)$, onde $p(x)\ e\ q(x)$ são funções somente da variável independente $x$ e é chamada de equação diferencial linear de primeira ordem.

O modelo Malthusiano é uma equação diferencial de primeira ordem que pode ser classificada como um dos dois tipos de equações definidas acima, ou seja, como uma EDO de primeira ordem de Variáveis Separáveis e também como Linear. Neste trabalho apresentamos a solução deste modelo pelo método de variáveis separáveis e o utilizamos para a comparação e verificação dos dados obtidos no IBGE, referentes à população de Osório no período de 2001 a 2010.

### Teoria e modelo de Malthus

O Modelo Matemático mais simples para representar o crescimento populacional é chamado o “Modelo de Crescimento Exponencial”, isto é, a taxa de variação da população em relação ao tempo, aqui denotada por $\frac{dp}{dt}$ é proporcional à população presente.

Em outras palavras, se $P = P(t)$ mede a população num determinado instante de tempo t, temos o seguinte modelo que é dado por: $\frac{dp}{dt} = kp$ onde a taxa $k$ é uma constante de proporcionalidade que relaciona a Natalidade $(n)$ e a Mortalidade $(m)$ e é dada por $k = n - m$. É simples verificar que se $k > 0$, nos teremos crescimento e se $k < 0$, nos teremos decrescimento.

Esta Equação Diferencial Linear Ordinária apresenta como solução a função dada pela expressão $P(t) = P_0 e^{kt}$ onde $P_0$ é a população inicial no instante $t = 0$, ou seja, $P(t = 0) = P_0$. Portanto, conclui-se que:

1) Se $k > 0$, a população cresce.
2) Se $k < 0$, a população se reduzirá.

Este modelo é suficientemente simples e válido, se o crescimento de nossa população está sujeito apenas às taxas de natalidade e mortalidade, sem que sejam consideradas no modelo as taxas de migração, e ainda se pudermos considerar a diferença entre as taxas de natalidade e de mortalidade que é um valor constante $k$, assim a seguinte formulação será dada por:

$$P(t) = P_0 e^{kt}$$

Para chegarmos a esta solução específica, apresentada acima, usamos $P_0$ uma condição inicial, como um valor conhecido do início do experimento, no instante $t = 0$, assim nossa condição inicial é $P(t = 0) = P_0$. Colocamos isso junto à equação diferencial original e deste modo obtemos um problema de valor inicial para o modelo de Malthus. A equação diferencial pode ser resolvida tanto pelo Método de Separação de Variáveis, como também pelo método das equações diferenciais lineares, mas neste trabalho optamos pelo método de variáveis separáveis.

**Resolução do modelo de Malthus**

A equação diferencial pode ser resolvida pelo Método de Separação de Variáveis. Assim temos, que:

$\frac{dp}{dt} = kp$ ,     pode ser escrito como, $\frac{dp}{p} = kdt$

Aplicando o Método de solução, temos:

$$\int \frac{dp}{p} - \int kdt = c$$

O modelo Malthusiano, devido á curva exponencial de $P(t)$ pode ser denominado como modelo de crescimento exponencial, obtendo-se a solução dada pela expressão:

$P(t) = P_0 e^{kt}$ , onde $k$ representa uma constante de proporcionalidade da população, a qual assumiu inicialmente ser dependente apenas de taxas constantes de natalidade e mortalidade.

**Apresentação de tabelas com os dados do IBGE e com os resultados obtidos com a solução do modelo de crescimento populacional através do método de variáveis separáveis:**

| **Anos** | **IBGE População** | **Taxa Média de Crescimento Anual** |
|---|---|---|
| 2001 | 36131 | 1,46%aa |
| 2007 | 39290 | 1,37%aa |
| 2010 | 40906 | |

**Tabela 1**: Censo demográfico de Osório de 2001/2010.
**Fonte**: IBGE.

Tomando os dados da tabela 1, e a solução do modelo, temos:

$$P(t) = P_0 e^{kt}$$

De 2001 a 2007

$$P(t=6) = P_0 e^{6k}$$

$$P(t=6) = 36131e^{6(1,46/100)}$$

$P(t=6) = 39439$ habitantes.

De 2001 a 2010

$$P(t=9) = P_0 e^{9k}$$

$$P(t=9) = 36131e^{9(1,47/100)}$$

$P(t=9) = 41242$ habitantes.

**Dados construídos a partir do estudo para comparação dos resultados**

| Anos | IBGE População | Modelo Por Variáveis Separáveis | Taxa Média de Crescimento Anual |
|---|---|---|---|
| 2001 | 36131 | 36131 | 1,46% |
| 2007 | 39290 | 39439 | 1,37% |
| 2010 | 40906 | 41242 | |

**Tabela 2**: Tabela dos dados obtidos pelo IBGE e pelos dados obtidos pelo modelo.
**Fonte**: Autoria Própria, 2012.

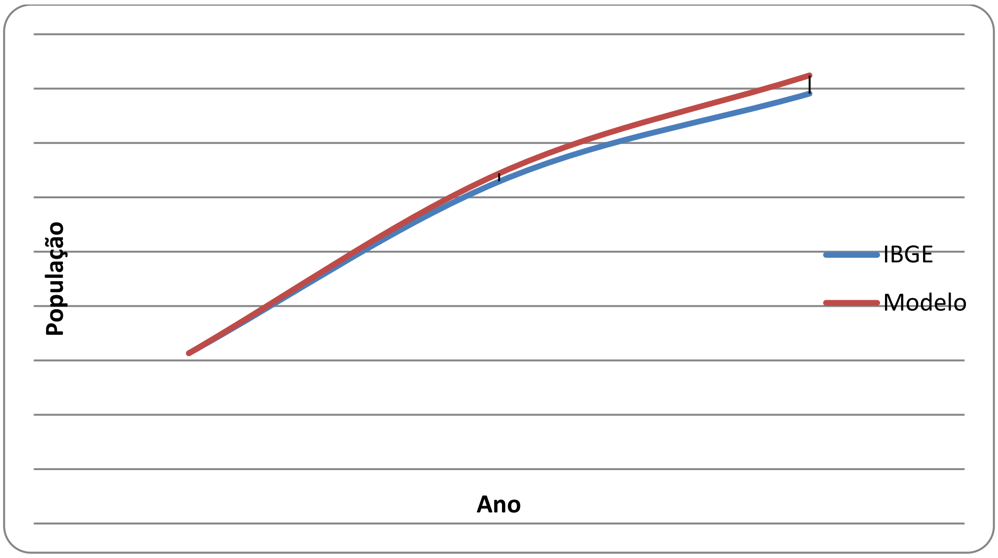


**Tabela 3**: Gráfico dos dados obtidos pelo IBGE e pelos dados obtidos pelo modelo.
**Fonte**: Autoria Própria, 2012.

Observou-se que os resultados obtidos com a solução do modelo de crescimento populacional através da aplicação do método de solução de equações diferenciais de varáveis separáveis, aproximam-se muito dos dados estatísticos reais constantes na base de dados do IBGE, o que nos mostra que este modelo é representativo deste fenômeno natural de crescimento populacional.

**Considerações finais**

Com este trabalho, concluímos que a aprendizagem dos conhecimentos matemáticos em qualquer nível de aprofundamento é muito importante para a compreensão dos mais diversos fenômenos do nosso cotidiano. Quanto maior o nível de conhecimento, maior será o potencial de entendimento dos modelos mais complexos. A adoção de modelos matemáticos seja na forma de apresentação, seja no processo de criação é muito importante para os educandos que estudam mais variados níveis da matemática, para que assim perceba a importância da matemática, suas linguagens, relações e símbolos.

Quando realizamos um trabalho no qual o conteúdo não é dissociado da realidade, percebe-se que existe uma conexão entre o que se aprendeu e o que se produziu, acreditamos que nós alunos nos tornamos entusiastas com a possibilidade de transformar ou de conscientizar, ainda que de forma lenta as pessoas, para que elas venham a exercer um papel que lhes cabe na sociedade e também de certa forma valorizar os conhecimentos adquiridos na nossa caminhada e vida acadêmica.

A validação deste modelo matemático se dá pelo motivo da aproximação do resultado encontrado com as informações obtidas durante a coleta de dados. Com a solução do modelo, e a mesma aplicada posteriormente sobre as taxas de crescimento da população do Município de Osório, observou-se que os resultados encontrados são muito próximos dos dados fornecidos pelo IBGE, levando em conta que o crescimento populacional é um fenômeno probabilístico e o modelo de Malthus é um modelo determinístico. Deste modo temos a validação do modelo apresentado pela teoria de Malthus, e assim podemos visualizar que a matemática está diretamente ligada à solução dos problemas modelados a partir dos fenômenos naturais, ampliando desse modo, o olhar dos estudantes de Matemática, sob as diversas situações e problemas da sociedade ou humanidade que são modelados e solucionados pelos diversos recursos matemáticos.

## Referências


BASSANEZI, Roney Carlos; FERREIRA, Wilson Castro. **Equações diferenciais com aplicações**. São Paulo: Editora Harba, 1988.

BASSANEZI, Rodney Carlos. **Ensino aprendizagem com modelagem matemática**. São Paulo: Editora Contexto, 2002.

BIEMBENGUT, Maria Salett. **Modelagem matemática e implicações no ensino aprendizagem de matemática**. São Paulo: Editora Contexto, 1999.

BOYCE, W. E.; PRIMA, R. C. **Equações diferenciais elementares de valores de contorno**. 6. ed. Rio de Janeiro: LTC, 1998.

IBGE. **População osoriense**. Disponível em: http://www.ibge.gov.br. Acesso em: 22/05/2010.